

# 4.2 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΎΜΩΝ

Άλγεβρα  
B λυκείου

# Διαίρεση πολυωνύμων

## □ Ταυτότητα Ευκλείδειας Διαίρεσης

Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων  $\Delta(x)$  και  $\delta(x)$  με  $\delta(x) \neq 0$

υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα  $\pi(x)$  και  $u(x)$  τέτοια ώστε  $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + u(x)$ , όπου το  $u(x)$  ή είναι το μηδενικό πολυώνυμα ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του  $\delta(x)$ .

$\Delta(x)$ : Διαιρετέος

$\delta(x)$ : διαιρέτης

# Διαίρεση πολυωνύμων

Ειδική  
περίπτωση  
:  $υ(x)=0$   
τότε

$$\Delta(x) = \delta(x)\pi(x)$$

- Η διαίρεση λέγεται τέλεια
- Το  $\delta(x)$  διαιρεί το  $\Delta(x)$  ή το  $\Delta(x)$  διαιρείται από το  $\delta(x)$
- Το  $\delta(x)$  είναι παράγοντας του  $\Delta(x)$

# Διαίρεση πολυωνύμων

1. Κάνουμε το σχήμα της διαίρεσης και γράφουμε τα δυο πολυώνυμα.

$$\begin{array}{r|l} x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\ \hline \end{array}$$

2. Βρίσκουμε τον πρώτο όρο  $x^2$  του πηλίκου διαιρώντας τον πρώτο όρο  $x^3$  του διαιρετέου με τον πρώτο όρο  $x$  του διαιρέτη.

$$\begin{array}{r|l} x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\ \hline & x^2 \end{array}$$

3. Πολλαπλασιάζουμε το  $x^2$  με  $x - 3$  και το γινόμενο  $x^3 - 3x^2$  το αφαιρούμε από το διαιρετέο. Βρίσκουμε έτσι το πρώτο μερικό υπόλοιπο  $-2x^2 + 2x - 1$ .

$$\begin{array}{r|l} x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\ \hline -x^3+3x^2 & \\ \hline -2x^2+2x-1 & \end{array}$$

# Διαίρεση πολυωνύμων

4. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2 και 3 με νέο διαιρετέο το  $-2x^2 + 2x - 1$ . Βρίσκουμε έτσι το δεύτερο μερικό υπόλοιπο  $-4x - 1$ .

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 5x^2 + 2x - 1 & x - 3 \\ \hline -x^3 + 3x^2 & \\ \hline -2x^2 + 2x - 1 & \\ 2x^2 - 6x & \\ \hline -4x - 1 & \end{array}$$

5. Τέλος επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2 και 3 με νέο διαιρετέο το  $-4x - 1$ . Βρίσκουμε έτσι το τελικό υπόλοιπο  $-13$  και το πηλίκο  $x^2 - 2x - 4$ .

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 5x^2 + 2x - 1 & x - 3 \\ \hline -x^3 + 3x^2 & \\ \hline -2x^2 + 2x - 1 & \\ 2x^2 - 6x & \\ \hline -4x - 1 & \\ 4x - 12 & \\ \hline -13 & \end{array}$$

# Διαίρεση πολυωνύμων

## Θεώρημα

- Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $x-\rho$  είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για  $x=\rho$ .

Δηλαδή  $u=P(\rho)$

## Παράδειγμα

- Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου  $P(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$

$$x - 2$$

με το

$$u = P(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 13 \cdot 2 - 15 =$$

$$8 + 12 - 26 - 15 = -21$$

# Διαίρεση πολυωνύμων

## Θεώρημα

- Ένα πολυώνυμο  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x-\rho$  αν και μόνον αν το  $\rho$  είναι ρίζα του  $P(x)$ .

Δηλαδή αν-ν  **$P(\rho)=0$**

## Παράδειγμα

- Τα πολυώνυμα  $x+2$  και  $x-1$  εξετάζονται αν είναι παράγοντες του πολυωνύμου  $P(x) = x^3 + x^2 - x + 2$

$$P(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - (-2) + 2 = -8 + 4 + 2 + 2 = 0$$

$$P(1) = 1^3 + 1^2 - 1 + 2 = 1 + 1 - 1 + 2 = 3 \neq 0$$

δεν είναι

# Διαίρεση πολωνύμων

## Ασκήσεις



## Ασκήσεις

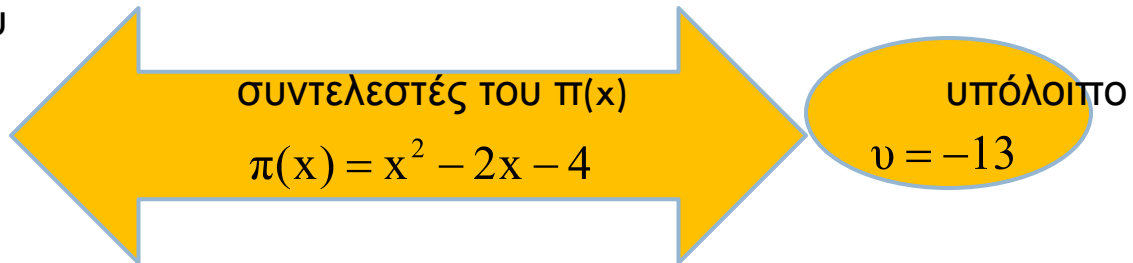
- [https://forms.office.com/Pages/ResponsePage.aspx?id=DQSIkWdsW0yxEjajBLZtrQAAA\\_AAAAAAAAAANAAQW7gwpUNjJIOVNTVU5ZVDQxUEcxOVY1WkRKN1Y1WS4u](https://forms.office.com/Pages/ResponsePage.aspx?id=DQSIkWdsW0yxEjajBLZtrQAAA_AAAAAAAAAANAAQW7gwpUNjJIOVNTVU5ZVDQxUEcxOVY1WkRKN1Y1WS4u)



# Σχήμα Horner

Θέλουμε να βρούμε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης  $(x^3 - 5x^2 + 2x - 1) : (x - 3)$

	$x^3$	$-5x^2$	$2x$	$-1$	$\rho = 3$
<b>1<sup>η</sup> γραμμή:</b> Συντελεστές του πολυωνύμου	1	-5	2	-1	$\rho = 3$
	↓	↓	↓	↓	
		3	-6	-12	
<b>3<sup>η</sup> γραμμή:</b> Προκύπτουν οι συντελεστές του $\pi(x)$ και το $u(x)=u$	$1 \times \rho \Rightarrow$	$-5 + 3$ $-2 \times \rho \Rightarrow$	$2 - 6$ $-4 \times \rho \Rightarrow$	$-1 - 12$ -13	



# Σχήμα Horner

Συμπληρώ-  
νουμε με το  
0 τους  
συντελεστές  
των  
δυνάμεων  
που δεν  
υπάρχουν

Σχήμα Horner για τη διαίρεση  $(3x^5 + 3x^4 + 6x - 13) : (x - 2)$

3	3	0	0	6	-13	$\rho=2$
	6	18	36	72	156	
3	9	18	36	78	143	

$$\pi(x) = 3x^4 + 9x^3 + 18x^2 + 36x + 78$$

$$\delta(x) = 143$$

# Σχήμα Horner

## Ασκήσεις



## Ασκήσεις

- [https://forms.office.com/Pages/ResponsePage.aspx?id=DQSIkWdsW0yxEjajBLZtrQAAA\\_AAAAAAAAAANAAQW7gwpUMEkYRUxGUDNWNlJQUzNYUjNaWjhOWDc2OS4u](https://forms.office.com/Pages/ResponsePage.aspx?id=DQSIkWdsW0yxEjajBLZtrQAAA_AAAAAAAAAANAAQW7gwpUMEkYRUxGUDNWNlJQUzNYUjNaWjhOWDc2OS4u)